Zum Einfluss der Mathematik
auf die kritische Philosophie
am Beginn des 20.-ten Jahrhunderts

Online-Vortrag am 10.6.2021 von Manfred Meier für die Regionalgruppe Mittelfranken der GWUP

==

Einige Thesen vorab:

Mathematik ist die Erforschung des Denkbaren.
(Quelle: ???)

Mathematik ist eine Kathedrale aus Konzepten.
(Quelle: Hans-Magnus Enzensberger)

Insofern sich die Sätze der Mathematik auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher,
und insofern sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit.
(Quelle: Albert Einstein)

Seit man begonnen hat, die einfachsten Behauptungen zu beweisen,
erwiesen sich viele von ihnen als falsch.
(Quelle: Bertrand Russell)

Ich will im Folgenden möglichst wenig Mathematik treiben, sondern eigentlich fragen:
Welchen Einfluss hatten Gedanken, die am Beginn des 20.-ten Jahrhunderts in der Mathematik gedacht wurden, auf die Philosophie, insbes. auf eine kritische Philosophie.

Ich will in der Mathematik nicht über das hinausgehen, was so ungefähr dem Wissen entspricht, die Schüler*innen mit der „mittleren Reife“ haben.

Ich zeige zuerst auf wie sich die Geometrie, die ja eigentlich jeder kennt, entwickelt.

Bedeutsam war Euklid (von Alexandria), über dessen Leben sehr wenig bekannt ist. Es wird angenommen, dass er wahrscheinlich so ungefähr 300 Jahre vor Christus in Athen geboren wurde, dort seine Ausbildung an Platons Akademie erhielt und dann in Alexandria wirkte. Er sollte nicht mit Euklid von Megara verwechselt werden, der vor dem Euklid, über den ich nun berichten will, lebte. Nachfolgend meine ich mit Euklid immer den Verfasser einer Sammlung von mathematischem Wissen, die als „Elemente des Euklid“ bezeichnet werden, weil er seine Sammlung als „Elemente“ bezeichnete. Er zeigte darin (auch) die Konstruktion geometrischer Objekte. Dazu benutzte er Definitionen, Postulate (nach Aristoteles Grundsätze, die akzeptiert oder abgelehnt werden können) und Axiome (nach Aristoteles allgemeine und unbezweifelbare Grundsätze). Viele Sätze der Elemente stammen offenbar nicht von Euklid selbst. Seine Hauptleistung besteht vielmehr in der Sammlung und einheitlichen Darstellung des mathematischen Wissens sowie der strengen Beweisführung, die zum Vorbild für die spätere Mathematik wurde.

Wir schauen einfach mal in der Wikipdia was davon immer noch sehr bekannt ist, zumindest am Beginn der gymnasialen Oberstufe bekannt sein sollte. Also ins Suchfeld „Elemente (Euklid)“ eingeben und es sollte die Seite mit der Adresse „https://de.wikipedia.org/wiki/Elemente_(Euklid)“ erscheinen.

Dabei fällt auf, dass vieles worüber er schrieb, den Pythagoreern zugeordnet wird, folglich bereits einige Jahrhunderte bevor es Euklid aufschrieb, bekannt war.

Ich zitiere die wikipedia:

> Natürlich gehörten *Die Elemente* zu den ersten Werken, die man gedruckt haben wollte. Die erste lateinische Ausgabe, beruhend auf der Übersetzung von Campanus von Novara, erschien 1482 in Venedig. Die vorbereitende Bearbeitung des Regiomontanus blieb in den 1460er Jahren unvollendet. Eine vollständige Übersetzung aus dem Griechischen [ins Lateinische] von Bartolomeo Zamberti (oder Zamberto, 1473 bis nach 1543) konnte dann 1505 gedruckt werden.

Gutenberg begann 1450 mit dem was später Buchdruck genannt wurde.
Nach der Bibel sind Euklids Elemente das am häufigsten gedruckte Buch geworden.
Die erste Ausgabe der ins deutsche übersetzten Elemente erschienen erst zwischen 1933 und 1937. Zuvor (1906) war bereits eine Übersetzung ins Englische erschienen. Beide beruhten auf einer Ausgabe, die ein Däne (Heiberg) erstellt hatte.

Was wir heute als „euklidische Geometrie“ ansehen hatte er größtgenteils im ersten Buch zusammengefasst.

Euklid davon überzeugt, dass die von ihm formulierten Postulate und Axiome die Wirklichkeit wiedergeben. Geometrie wurde über zweitausend Jahre lang gemäß Euklid gelehrt.

Einige Highlights (nur geometrische):

- Buch 1, Postulat 5: Parallelenaxiom
- Buch 1, Proposition 47: Satz des Pythagoras
- Buch 1, Proposition 32: Winkelsumme im Dreieck
- Buch 2, Proposition 4: Erste Binomische Formel
- Buch 3, Proposition 20: Kreiswinkelsatz
- Buch 3, Proposition 31: Satz des Thales
- Buch 4, Proposition 11: Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks
- Buch 6, Proposition 2: Erster Strahlensatz
- Buch 6, Proposition 4: Ähnlichkeitssätze für das Dreieck

[Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Elemente_(Euklid)]

noch zwei, die nicht zur Geometrie gehören:

- Buch 9, Proposition 20: Existenz unendlich vieler Primzahlen (Satz von Euklid)
- Buch 10, Proposition 10: Irrationalität der Quadratwurzel von 2

Die Geometrie „tümpelte“ gewissermaßen vor sich hin.
Ein Highlight waren dann nur noch deren die Algebraisierung des Decartes. Durch ihn wurde die analytische Geometrie „ins Leben gerufen“. Der Trick war an sich simpel: Man benutzt ein Koordinatensystem. Aus geometrischen Objekten werden dann Gleichungen, dh. Sie werden durch Gleichungen, die sie erfüllen, „beschrieben“.

Es gab allerdings schon lange ein Problem(chen):
Jahrhundertelang war vergeblich versucht worden, das fünfte Postulat des Euklid (Parallelenaxiom) auf (ein) einfachere(s) zurückzuführen; ca. 1830 kamen sowohl János Bolay als auch Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (unabhängig von einander) auf die Idee das Parallelenaxiom durch seine Verneinung zu ersetzen und erwarteten, dass es dann zu Widerprüchen kommen müsste.

Das beruht darauf, dass wenn aus Aussagen A, B, C, … die Aussage P folgt, dann kann nicht auch die Negation von P daraus folgen. Der Satz „Es gilt A und B und … und nicht P“ muss dann zu einem Widerspruch führen, also falsch sein.

Doch es gab eine Überraschung: Wider Erwarten führten ihre Untersuchungen zu jeweils einem logisch völlig einwandfreien geometrischen System. Lobatschewski berichtete am 23. Februar 1826 erstmals darüber, was im *Bulletin der Kasaner Universität* veröffentlicht wurde.

Es waren nicht-euklidische Geometrien erdacht worden.

„Nicht der Beweis war indes so beunruhigend, sondern vielmehr sein rationales Nebenprodukt, das schon bald ihn und fast alles in der Mathematik überschatten sollte: Die Mathematik, der Eckstein wissenschaftlicher Gewissheit, war auf einmal ungewiss geworden. Man hatte es jetzt mit *zwei* einander widersprechenden Visionen unantastbarer wissenschaftlicher Wahrheit zu tun“, was zu einer tiefen Krise in den Wissenschaften führte.

Es sollte noch schlimmer kommen, worauf später noch eingehen will.
Hier nur eine Andeutung:
Das interessante daran war, dass die geometrischen Objekte, die sie untersuchten, Teil eines euklidischen Raumes waren. Allerdings dauerte es noch einige Jahrzehnte, bis die Bedeutung dessen, dass man so vergehen konnte, ins Bewusstsein der Mathematiker drang und genutzt wurde.

Ich will eine einfache nicht-euklidische Geometrie vorstellen: Geometrie auf einer Kugel.

> Details:
> http://www.hopfenwiesen.de/1-runterladen/1-12-sphaerGeo.php
> darin ist auch eine m.E. gute Literaturliste

Gerade werden zu Großkreisen (:= Schnittmengen von Ebenen durch den Kugelmittelpunkt)
Ich habe auf eine metallische Kugel mal 2 Geraden gezeichnet.
Was fällt auf?

Mittels eines Gummiringes deute ich eine weitere „Gerade“ an.
Winkelsumme im Dreieck ist …?

Hinweis:

Auf fast jedem Globus sind Längen- und Breitenkreise eingezeichnet.
ACHTUNG: Nur einer der Breitenkreise ist eine „Gerade“: Der Äquator.
Nur die Längenkreise sind „Geraden“.

Interessante Punkte sind Pole. Zur „Geraden“ Äquator und einem Pol (also einem besonderen Punkt außerhalb der Geraden) gibt es viele (verschiedene) Geraden, die auf dem Äquator senkrecht stehen und durch den Pol gehen. In der euklidischen Geometrie gibt es zu jeder Geraden g und einem Punkt P außerhalb von g nur eine weitere Gerade, die durch P geht und auf der Gerade g senkrecht steht.

Einige Mathematiker begannen etwas heftiger nachzudenken. Einer davon war David Hilbert. Er veröffentlichte 1899 ein Buch, das er „Grundlagen der Geometrie“ betitelte.

David Hilbert

(* 23. Januar 1862 in Königsberg[1]; † 14. Februar 1943 in Göttingen) gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker der Neuzeit. Viele seiner Arbeiten auf dem Gebiet der Mathematik und mathematischen Physik begründeten eigenständige Forschungsgebiete.

Mit seinen Vorschlägen begründete er die bis heute bedeutsame formalistische Auffassung von den Grundlagen der Mathematik und **veranlasste eine kritische Analyse der Begriffsdefinitionen der Mathematik und des mathematischen Beweises. Diese Analysen führten zum Gödelschen Unvollständigkeitssatz**, der unter anderem zeigt, dass das Hilbertprogramm, die von Hilbert angestrebte vollständige Axiomatisierung der Mathematik, nicht gänzlich erfüllt werden kann.

Hilberts programmatische Rede auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900, in der er eine Liste von 23 mathematischen Problemen vorstellte, beeinflusste die mathematische Forschung des 20. Jahrhunderts nachhaltig.

Nach der nationalsozialistischen Machtergreifung im Jahr 1933 musste Hilbert mitansehen, dass das mathematische Zentrum und die physikalische Fakultät der Göttinger Universität durch die Nationalsozialisten personell zerstört wurden. Alle „nicht-arischen“ Mathematiker wie Edmund Landau, Richard Courant, Max Born, Felix Bernstein, Emmy Noether, Otto Blumenthal und auch politisch Andersdenkende wie Hermann Weyl wurden zur Aufgabe ihrer Tätigkeit gezwungen, etliche emigrierten. Als Hilbert bei einem Bankett 1934 von dem neuen preußischen Unterrichtsminister Bernhard Rust gefragt wurde, ob es denn stimme, dass sein Institut „unter dem Weggang der Juden und Judenfreunde“ gelitten habe, erwiderte er: „Das Institut – das gibt es doch gar nicht mehr.“

Anlässlich des Todes von Hilbert entstand:
Hermann Weyl: *David Hilbert and his mathematical work.* Bulletin of the American Mathematical Society 50,612–654 (1944) pdf

In den „Grundlagen der Geometrie“ zeigte Hilbert wie er sich „mathematisches Arbeiten“ vorstellte.
Sein Ausgangspunkt waren sog. Axiome, aus denen mathematische Aussagen abgeleitet wurden.
Es wurde zum Vorbild für die Darstellung der Mathematik (Stichwort „neue Mathematik“ oder „moderne Mathematik“).
Noch heute gehen die meisten (alle?) Mathematiker in der von ihm dargestellten Art und Weise vor.

Ungefähr gleichen Zeit arbeiteten andere Mathematiker an einem anderen Problem: Man suchte eine Begründung der Logik (ganz im hilbertschen Sinn), es ging also nicht nur um „Grundlagen der Geometrie".

Dabei wurde Gottlob Frege wichtig, der eine sehr formale Darstellung der Regeln der Logik lieferte. Leider benutzte er dafür Symbole, die später nicht mehr verwendet wurden, so dass es jetzt /heutzutage schwierig ist sein Hauptwerk zu lesen.

> **Friedrich Ludwig Gottlob Frege**
>
> (* 8. November 1848 in Wismar; † 26. Juli 1925 in Bad Kleinen)
>
> **Seine herausragende Leistung auf dem Gebiet der Logik besteht darin, als erster eine formale Sprache und, damit zusammenhängend, formale Beweise entwickelt zu haben.**
>
> Er verfasste „Begriffsschrift *eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens"*
>
> Im Bereich der Philosophie waren seine sprachphilosophischen Betrachtungen außerordentlich einflussreich. Unmittelbar beeinflusst hat er u. a. Rudolf Carnap, der bei ihm studierte, Bertrand Russell und Ludwig Wittgenstein. Frege gilt als **einer der hauptsächlichen Wegbereiter der analytischen Philosophie**, einer der wichtigsten Strömungen der Philosophie des 20. Jahrhunderts.
>
> Nachdem die durch Aristoteles begründete Syllogistik seit der Antike als die exakteste Form logischen Schließens gegolten hatte, begann mit Freges revolutionärer „Begriffsschrift" von 1879 eine neue Ära in der Geschichte der Logik. In dieser Publikation **entwickelte er eine neue Logik in axiomatischer Form**, die bereits den Kernbestand der modernen formalen Logik umfasste, nämlich eine Prädikatenlogik zweiter Stufe mit Identitätsbegriff.

Ich hätte gerne einige Seiten der Begriffsschrift gezeigt, fand aber nur einen schlechten Scan. Leider habe ich es versäumt, mir das Buch aus der Uni-Bib zu leihen.

Frege erfand eine Formelsprache mit der er die Logik darstellte. Es wäre jetzt auch interessant sich mit dem Thema Identität zu befassen, was ich aber - mangels Zeit - nicht tue. Interessant ist das Thema deshalb, weil die Quantentheorie die Identität „auflöste". Gemäß dieser ist es z.B. nicht möglich, ein Elektron zu „identifizieren".

Ebenso wurde nach den Grundlagen der Arithmetik gesucht. Gemeint ist die Suche nach Axiomen, aus denen man die bekannten Gesetze der Arithmetik ableiten kann.

Frege war der Begründer eines neuen mathematikphilosophischen Programms, des Logizismus, dem zufolge die **Sätze der Arithmetik sich auf logische Wahrheiten zurückführen lassen**. Dieses Programm wurde von ihm in *„Grundgesetze der Arithmetik"* (2 Bände) streng formal durchgeführt. Die **Darlegungen Freges enthielten jedoch einen Widerspruch**, die sogenannte **Russellsche Antinomie**, wie Frege in einem berühmt gewordenen Brief von Bertrand Russell von

1902 erfahren musste. Frege sah sein Lebenswerk gescheitert und zog sich resigniert von der Logik zurück. **Er hatte jedoch durch seine Arbeit die wesentlichen Grundlagen geschaffen, auf denen andere, insbesondere Russell, aufbauen und das logizistische Programm vollenden konnten.**

Frege hatte eine Konstruktion benutzt, die auf einen Georg Cantor zurückging, aber noch nicht „ausgereift“ war: *„Unter einer „Menge“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die „Elemente“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.“* So versuchte Cantor den Begriff Menge zu beschreiben. Frege benutzte ihn in gefährlich unaxiomatischer Art und hatte sich damit „einer Kröte bedient“, denn es war ein Bertrand Russell, der ihn in einem Brief darauf hinwies, dass darin eine Antinomie steckt. Als Frege Russels Brief bekam war der zweite Band *„Grundgesetze der Arithmetik“* bereits gedruckt – eine Tragödie. Es wurde dann noch eine Beilage, die auf den Fehler hinwies, gedruckt. Frege schrieb dazu: „Einem wissenschaftlichen Schriftsteller kann kaum etwas Unerwünschteres begegnen, als daß ihm nach Vollendung einer Arbeit eine der Grundlagen seines Baues erschüttert wird. In diese Lage wurde ich durch einen Brief des Herrn Bertrand Russell versetzt, als der Druck dieses Bandes sich seinem Ende näherte.“

Russell und einem Alfred North Whitehead gelang es in einem Werk (3 Büchern) mit dem Titel „Principia Mathematica“, was allerdings erst 1913 vollendet war (der erste Band erschien 1910). Es waren ca. 1900 Seiten.

Hier ein Beispiel:

***300·32.** $\vdash : R \in \text{Rel num id} \,.\supset.\, R_0 = I \upharpoonright C'R$

Dem.

$\vdash .\, *91{\cdot}35 \,.\supset \vdash .\, I \upharpoonright C'R \in \text{Potid}'R - \text{Rl ex}'J$ (1)

$\vdash .\, (1) \,.\, *300{\cdot}31 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·321.** $\vdash : R \in \text{Rel num id} \,.\, R \neq R_0 \,.\supset.\, R \subseteq J \,.\, \dot{\exists} ! R$ [*300·31]

***300·322.** $\vdash : R \subseteq J \,.\supset.\, R_{\text{po}} \dot{\cap} R_0 = \dot{\Lambda}$

Dem.

$\vdash .\, *121{\cdot}3 \,.\supset \vdash : x R_{\text{po}} y \,.\, x \neq y \,.\supset.\, \sim(x R_0 y)$ (1)

$\vdash .\, *50{\cdot}24 \,.\supset \vdash :.\, \text{Hp} \,.\supset : \sim(xRx) :$ (2)

[*91·57] $\supset : x R_{\text{po}} x \,.\supset.\, x (R_{\text{po}} \,|\, R)\, x \,.$

[*121·103.(2)] $\supset.\, R(x \mapsto x) \neq \iota' x \,.$

[*121·11] $\supset.\, \sim(x R_0 x)$ (3)

$\vdash .\, (1) \,.\, (3) \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·323.** $\vdash : R \in \text{Rel num id} \,.\, R \neq R_0 \,.\supset.\, R_{\text{po}} \subseteq J$

Dem.

$\vdash .\, *300{\cdot}321{\cdot}322 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset.\, R_{\text{po}} \dot{\cap} R_0 = \dot{\Lambda} \,.$

[*300·32] $\supset.\, R_{\text{po}} \dot{\cap} I \upharpoonright C'R = \dot{\Lambda} : \supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·324.** $\vdash :.\, R \in \text{Rel num id} \,.\supset : R \subseteq I \,.\vee.\, R \in \text{Rel num}$

Dem.

$\vdash .\, *300{\cdot}311{\cdot}323 \,.\supset \vdash :.\, \text{Hp} \,.\supset : R \subseteq I \,.\vee.\, R_{\text{po}} \subseteq J$ (1)

$\vdash .\, *300{\cdot}32 \,.\quad \supset \vdash : R \in \text{Rel num id} \,.\, R_{\text{po}} \subseteq J \,.\supset.\, \text{Potid}'R - \iota' R_0 = \text{Pot}'R$ (2)

$\vdash .\, (2) \,.\, *300{\cdot}31 \,.\quad \supset \vdash : R \in \text{Rel num id} \,.\, R_{\text{po}} \subseteq J \,.\supset.\, \text{Pot}'R \subset \text{Rl}'J$ (3)

$\vdash .\, (1) \,.\, (3) \,.\, *300{\cdot}3 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·325.** $\vdash : R \subseteq I \,.\supset.\, R \in \text{Rel num id}$

Dem.

$\vdash .\, *300{\cdot}312 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset.\, \text{Potid}'R - \iota' R_0 = \Lambda$ (1)

$\vdash .\, (1) \,.\, *300{\cdot}31 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·326.** $\vdash : R \in \text{Rel num} \,.\supset.\, R \in \text{Rel num id}$

Dem.

$\vdash .\, *121{\cdot}3 \,.\, *300{\cdot}3 \,.\quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset.\, R_0 \sim\in \text{Pot}'R$ (1)

$\vdash .\, *121{\cdot}302 \,.\, *300{\cdot}3 \,.\supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset.\, R_0 = I \upharpoonright C'R$ (2)

$\vdash .\, (1) \,.\, (2) \,.\, *91{\cdot}35 \,.\quad \supset \vdash : \text{Hp} \,.\supset.\, \text{Potid}'R - \iota' R_0 = \text{Pot}'R$ (3)

$\vdash .\, (3) \,.\, *300{\cdot}3{\cdot}31 \,.\supset \vdash .\, \text{Prop}$

***300·33.** $\vdash .\, \text{Rel num id} = \text{Rl}'I \cup \text{Rel num}$ [*300·324·325·326]

***300·34.** $\vdash .\, \dot{\Lambda} \in \text{Rel num}$ [*300·3 . *72·1]

***300·4.** $\vdash .\, \text{Rel num} = \text{Cnv}``\text{Rel num}$ [*300·3 . *91·522]

***300·41.** $\vdash .\, \text{Rel num id} = \text{Cnv}``\text{Rel num id}$ [*300·31 . *91·521]

Das auf dieser Seite dargelegte ist doch gut nachvollziehbar – oder nicht?

Die *Principia Mathematica* stellen den Versuch dar, mathematischen Wahrheiten aus einem wohldefinierten Satz von Axiomen und Schlussregeln (Inferenzregeln der symbolischen Logik) herzuleiten. Auf mehreren hundert Seiten wird zunächst ein Repertoire aus Begriffen und Symbolen dargelegt, welches das Fundament zur späteren Herleitung der Arithmetik bildet. Dieses Werk behandelt nur die Mengentheorie, die Kardinalzahlen, die Ordinalzahlen und die rellen Zahlen; tiefergehende Sätze aus der reellen Analysis sind nicht enthalten, **aber gegen Ende des dritten Bandes wird klar, dass die gesamte bekannte Mathematik im Prinzip aus dem vorgestellten Formalismus entwickelt werden kann. [???]**

Das ist sicher falsch. Richtig ist aber, dass wiederum ein Werk vorgelegt wurde, das zeigte wie man mathematisches Wissen mittels einem, nun weiter entwickelten Formalismus aus Axiomen herleitet. Daraus entstand der Eindruck, dass man nur irgendwie geeignete Axiome bräuchte, so dass man dann, mittels einem Formalismus ala Principia Mathematica, die gesuchten Ergebnisse herleiten kann. Idee, Vorstellung eines erreichbaren Zieles ist also: Man schaffe sich einen Apparat, der Axiome formuliert und dann - ratatata - mathematische Ergebnisse liefert.

„KI“ lässt grüßen?

Es sollte noch einige Jahre dauern, bis klar war: So geht vielleicht viel, aber sicher nicht alles.

Erinnerung: Mathematik ist die Erforschung des Denkbaren.

Welche Anforderungen müssen oder sollten die verwendeten Axiome erfüllen?

Widersprüche dürfen aus einer Sammlung von Axiomen (für jedes Teilgebiete der Mathematik, des Denkens) nicht entstehen. Solche eine Sammlung von Axiomen wird als konsistent bezeichnet.
Ein System T heißt *widerspruchsfrei* oder *konsistent*, wenn es <u>keine</u> Aussage A gibt, sodass aus T sowohl A als auch die Verneinung (Negation) ¬ A von A folgt. Diese Bedingung ist, wie man mit dem Prinzip „ex falso quodlibet“ leicht zeigen kann, äquivalent dazu, dass nicht jede Aussage aus T folgt.

In einer verwendeten Sammlung von Axiomen sollen diese voneinander unabhängig sein. Bolay und Lobatschewski hatten vorgemacht wie man vorgehen kann, um Unabhängigkeit zu zeigen, dh. man zeigt die Widerspruchsfreiheit der Sammlung, wenn man statt eines Axioms dessen Verneinung in die Sammlung aufnimmt (z.B. statt dem Parallelenaxiom dessen Verneinung).

Die Axiome sollen vollständig sein, d.h. aus ihnen soll alles bereits Bekannte und alles worauf man nicht verzichten möchte, gefolgert werden können. ???
Etwas genauer:
Ein System T heißt *vollständig*, wenn <u>für alle</u> Aussagen A die Aussage A oder ihre Negation ¬ A aus T folgt.

Was heißt denn „aus T (einer Sammlung von Axiomen) folgt A“?
Hinweis: In der Mathematik wird zwischen her- / ableitbar und beweisbar unterschieden.

Ein Kurt Gödel bewies 1929 einen Vollständigkeitssatz (für eine *Prädikatenlogik erster Stufe)*.

Es ist der Hauptsatz der mathematischen Logik. Er zeigt für den Hilbert-Kalkül (ein formales System der Prädikatenlogik erster Stufe) die Korrektheit und Vollständigkeit: Jeder Satz, der semantisch aus einer Formelmenge folgt, lässt sich mit den Schlussregeln des Systems aus der Formelmenge herleiten, und umgekehrt. Für die Logik erster Stufe sind also syntaktische und semantische Folgerung gleichbedeutend.

> Etwas mathematischer:
>
> Verwendet man $\models$ als Zeichen für die semantische Folgerung und $\vdash$ für die Herleitbarkeit im Kalkül, ergibt sich die kurze Formulierung:
>
> $(\Gamma \models \varphi) \Longleftrightarrow (\Gamma \vdash \varphi)$
>
> Der Schluss von rechts nach links bedeutet die Korrektheit des Kalküls: Alles, was sich mit dem Kalkül aus vorgegebenen Annahmen herleiten lässt, folgt auch „wirklich“ logisch aus diesen Annahmen. Jeder sinnvolle Logikkalkül muss diese Forderung erfüllen.
>
> Der Schluss von links nach rechts ist die eigentliche Vollständigkeit: Es wird behauptet, dass zu jedem Satz, der aus einer Menge von vorgegebenen Annahmen logisch folgt, tatsächlich ein Beweis aus diesen Annahmen im Kalkül existiert.

Viel wichtiger wurden aber zwei Sätze die noch folgen sollten.

Der **Gödelsche Unvollständigkeitssatz** ist einer der wichtigsten Sätze der modernen Logik. Er beschäftigt sich mit der Ableitbarkeit von Aussagen in formalen Systemen. Der Satz zeigt die Grenzen der formalen Systeme – ab einer bestimmten Leistungsfähigkeit – auf. Er weist nach, dass es in hinreichend starken Systemen, wie der Arithmetik, Aussagen geben muss, die man formal weder beweisen noch widerlegen kann.

Hatte Gödels erste Arbeit noch als ein Hinweis auf die Durchführbarkeit des Hilbertschen Vorhabens, z.B. die Arithmetik (die Theorie der natürlichen Zahlen) vollständig und widerspruchsfrei zu axiomatisieren, gelten können, so war seine bedeutendste Arbeit, die er im Jahr 1931 veröffentlichte, das Ende des Traums von David Hilbert.

In der Arbeit mit dem Titel ***Über formal unentscheidbare Sätze der Principia mathematica und verwandter Systeme*** bewies Gödel den ersten Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Dieser besagt, dass **in jedem (widerspruchsfreien) Axiomensystem, das <u>genügend reichhaltig ist, um die Arithmetik der natürlichen Zahlen in der üblichen Weise aufzubauen, und das überdies hinreichend einfach ist</u>, es immer Aussagen gibt, die aus diesem weder bewiesen noch widerlegt werden können.**

Als zweiter Gödelscher Unvollständigkeitssatz wird Gödels Korollar zum ersten bezeichnet, wonach die Widerspruchsfreiheit eines solchen Axiomensystems nicht aus dem Axiomensystem selbst ableitbar ist.

Was ist denn nun ein „**Axiomensystem, das <u>genügend reichhaltig ist, um die Arithmetik der natürlichen Zahlen in der üblichen Weise aufzubauen, und das überdies hinreichend einfach ist“ ?</u>**

Man braucht also ein Axiomensystem, mittels dem man zu natürlichen Zahlen kommen kann.

Doch das ist (gemäß einer Idee von John von Neumann) ziemlich einfach

M0 := ……………………………… {}

M1 := { M0 } = …………………..{ {} }

M2 := { M1 M0 } = …..……… { { {} } {} }

M3 := { M2 M1 M0 } = …….. { { { {} } {} } { {} } {} }

M4 := { M3 M2 M1 M0 } = { { { { {} } {} } { {} } {} } { { {} } {} } { {} } {} }

mathematische Definition (eines Nachfolgers zu a, das ursprünglich die leere Menge ist):

> a + 1 := {a}□ a,   links stehen zwei nichtssagende Symbole „ + 1“
>
> also so, wenn man mit a = { } beginnt:
>
> 0
>
> 0 + 1 := { 0 } □ 0 = { 0 }
>
> 2 := 1 + 1 := { 1 } □ 1= { 1 } □ { 0 } = { 1 ; 0 } = {{ 0 }; 0} was man eine Menge der Kardinalität 2 nennt
>
> usw.   :-))

Tipp: Man denke an unterschiedlich gefüllte Schachteln, die letztendlich nichts enthalten, mittels denen man Zahlen erzeugen kann.

Zahlen gehören, vermute ich, zu jeder Sprache, vermutlich auch die Arithmetik. Für diese Sprachen (mit deren Art Arithmetik zu „treiben“) gelten die Gödelschen Unvollständigkeitssätze!

Man kann also in jeder Sprache, in der man zählen und mit natürlichen Zahlen rechnen kann, Sätze formulieren, die sich aus den Grundannahmen (Axiomen) weder beweisen, noch widerlegen lassen, egal welches Axiomensystem man benutzt (dann können es immer wieder andere Aussagen sein).

Was bedeutet das für unser Denken, insbes. fürs philosophische oder gar fürs wissenschaftliche Denken?

Wiener Kreis

Ludwig Wittgenstein

Rudolf Carnap

Alfred Jules Ayer

Hilary Putnam

Paul Lorenzen (& Wilhelm Kamlah)

Paul Feyerabend & Imre Latakos

Bekannt wurde Feyerabend durch seinen wissenschaftstheoretischen Anarchismus. Nach Feyerabend lassen sich keine universellen und ahistorischen wissenschaftlichen Methoden formulieren, produktive Wissenschaft müsse vielmehr Methoden nach Belieben verändern, einführen und aufgeben dürfen. Zudem gebe es keine allgemeinen Maßstäbe, mit denen verschiedene wissenschaftliche Methoden oder Traditionen bewertet werden könnten. Das Fehlen allgemeiner Bewertungsmaßstäbe führt ihn zu einem philosophischen Relativismus, nach dem keine Theorie allgemein wahr oder falsch ist.

Monografien:
Against Method. Outline of an anarchistic Theory of Knowledge (*1975)*
Science in a Free Society (1978),
in denen er den Methodenanarchismus beschreibt und für eine pluralistische Methodik in der Wissenschaft plädiert. Feyerabend kam dadurch in die Rolle des **Hauptgegners der etablierten wissenschaftsphilosophischen Ansätze**.

„Anything goes"

Der dem gleichnamigen Musical (Cole Porter, 1934) entliehene Slogan „anything goes" wurde von dem Philosophen Paul Feyerabend maßgeblich in seinen beiden Werken *Wider den Methodenzwang* und *Erkenntnis für freie Menschen* (*Science in a Free Society,* 1978) geprägt und enthält ironisch überspitzt den Kern eines seiner hauptsächlichen Argumente in den beiden Büchern, die sich gegen die aus dem Wiener Kreis, dem Logischen Positivismus und dem Kritischen Rationalismus stammenden Wissenschafts- und Erkenntnistheorien wenden.

Anything goes **ist nach Feyerabend die für einen Rationalisten einzig mögliche allgemeine Beschreibung des historischen Verlaufs wissenschaftlicher Forschung: In der Geschichte wurde immer wieder gegen bis dato geltende Regeln und Maßstäbe der Wissenschaften verstoßen. Dennoch bzw. gerade dadurch wurden die Wissenschaften vorangebracht** (als prominentes Beispiel hierfür nennt Feyerabend Galileo Galilei)**, daher gebe es außer *anything goes* schlicht keine rationale und allgemeine sowie jederzeit gültige Regel, was in der Wissenschaft erlaubt oder geboten sei, für die man garantieren könnte, dass sie den wissenschaftlichen Fortschritt unmöglich behindern könnte.** Feyerabend wollte mit *anything goes* ausdrücken, dass eine Methodologie mit Anspruch auf universelle Gültigkeit in Bezug auf die tatsächliche Wissenschaftsgeschichte zwingend inhaltsleer und nutzlos sei.

ANYTHING GOES ?